සංකීර්ණ සංඛ්‍යා

(1) ආගන්ඩ් සටහනේ P ද $P^{/}$ද යන ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් Z ද $Z^{/}$ යන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි.

i) Q යනු $\frac{PQ}{QP^{/}} = \frac{\lambda}{\mu}$ වන පරිදි $PP^{/}$ සරල රේඛාව මත වූ ලක්ෂ්‍යය නම්, Q මගින් නිරූපණය කරෙන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.

ii) $Z - Z^{/}$ සංකීරණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය සෙවීමට ජ්‍යාමිතික නිර්මාණයක් ඉදිරිපත් කරන්න.

ආගන්ඩ් සටහනේ P_1, P_2, P_3, P_4 ලක්ෂ්‍යය පිළිවෙලින් Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 යන සංකීරණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි. $Z_1 - Z_2 = Z_4 - Z_3$ නම් ද එසේම නම් පමණක් ද P_1, P_2, P_3, P_4 සරල රේඛීය රූපය සමාන්තරාස්‍රයක් වන බව සාධනය කරන්න. සමාන්තරාස්‍රයක විකර්ණ එකක් අනෙක සමච්ඡේදනය කරන බව පෙන්වීමට මෙම ප්‍රතිඵලය උපයෝගී කරගන්න. (දෛශික ක්‍රම පිළිගනු නො ලැබෙයි.) (1976)

(2) a, b යනු සංකීර්ණ සංඛ්‍යා විට $a^3 = b$ නම්, a යනු b හි ඝන මූලයක් යැයි අර්ථ දක්වනු ලැබේ. මේ අර්ථ දැක්වීම අනුව $Z_1 = \cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}$, $Z_2 = \cos\frac{2\pi+\theta}{3} + i\sin\frac{2\pi+\theta}{3}$, $Z_3 = \cos\frac{4\pi+\theta}{3} + i\sin\frac{4\pi+\theta}{3}$ යන සංඛ්‍යා එක එකක් $Z = \cos\theta + \sin\theta$ යන්නෙහි ඝන මූලයක් වන බව පෙන්වන්න. ඒනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ

i) $1 \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, $\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$ සංඛ්‍යා එක එකක් 1 හි ඝන මූලයක් බව ද

ii) $-1, \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}, \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$ සංඛ්‍යා එක එකක් -1 හි ඝන මූලයක් වන බව ද පෙන්වන්න. $Z^{'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i)$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $\cos\alpha + i\sin\alpha$ ආකාරයෙන් ලියන්න. මෙහි $0 < \alpha < \pi$ වෙයි. ඒ නයින් Z' හි ඝන මූල තුන ලියන්න. (1977)

(3) ආගන්ඩ් සටහනේ P, P' ලක්ෂ්‍ය මගින් Z, Z' සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරනු ලැබෙයි. $\frac{Z}{Z^{/}}$ ද $Z - Z'$ ද යන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය ලබාගැනීම සඳහා ජ්‍යාමිතික නිර්මාණ දෙන්න. ආගන් සටහනේ පිළිවෙලින් Z_1, Z_2 හා Z_3 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරනු ලබන P_1, P_2 හා P_3 ලක්ෂ්‍යය වාමාවාර්ත අතට ගන්නා ලද ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂ ය. $\frac{Z_1 - Z_2}{Z_3 - Z_2} =$ කොස් $\frac{\pi}{3} + i$ සයින් $\frac{\pi}{3}$ නම් ද එසේ නම් පමණක් ද P_1, P_2, P_3 ත්‍රිකෝණය සමපාද බව සාධනය කරන්න. (1977)

(4) i) ආගන්ඩ් සටහනේ P ද Q ද මගින් Z_1, Z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි. O යනු මූල ලක්ෂ්‍යයයි. $|Z_1 - Z_2| = |Z_1 + Z_2|$ නම් OQ ට OP ලම්බ බව පෙන්වන්න.

ii) a,b යනු තාත්ත්වික සංඛ්‍යා විට, a + *i*b ආකාරයෙන් $(3 + 2i)(7 + 5i)$ ප්‍රකාශ කරන්න. $11^2 + 29^2$ යන්නෙහි සාධක යුගලයන් අපෝහනය කර ඒ නයින්, ධන නිඛිල දෙකක ගුණිතය ලෙස $11 - 29i$ ප්‍රකාශ කරන්න.

iii) $|Z + i| + |Z - i| = 4$ ද විස්තා. $(iz) = \pi$ ද වන පරිදි වූ Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න. (1978)

(5) ආගන්ඩ් සටහනේ P_1 P_2 ලක්ෂ්‍යවලින් පිළිවෙලින් Z_1 Z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කෙරෙයි. P_1 P_2 හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයෙන් $\frac{1}{2}$ (Z_1+Z_2) සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කෙරෙන බව පෙන්වන්න. A ලක්ෂ්‍යයෙන් a සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කෙරෙයි. $AP_1 = AP_2$ ද $P_1AP_2 \measuredangle = \frac{\pi}{2}$ ද වන්නේ $Z_2 - a = \pm i\ (Z_1 - a_1)$ විට බවත් එසේ විටම පමණක් බවත් පෙන්වන්න. Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 ලක්ෂ්‍යවලින් පිළිවෙලින් $3 + 4i$, $9 + 12i$, $1 + 18i$ $-5 + 10i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන්ඩ් සටහනේ නිරූපණය කෙරෙයි. Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 යනු සමචතුරස්‍රයක වාමාවර්ත අතට පිළිවෙලින් ගත් ශීර්ෂ බව පෙන්වීමට චතුරස්‍රයක විකර්ණ දෙක දිගෙන් සමාන වී එකක් අනෙක සෘජුකෝණී ලෙස සමච්ඡේදනය කරයි නම් ද එසේ කරන්නේ නම් පමණක් ද එය සමචතුරස්‍රයෙකි යන ජ්‍යාමිතික අවශ්‍යතාව භාවිත කරන්න. සමචතුරස්‍රයක එක් ශීර්ෂයෙකින් $2 - i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කෙරෙයි නම්ද සමචතුරස්‍රයේ කේන්ද්‍රයෙන් $1+2i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරපණය කෙරෙයි නම්ද සමචතුරස්‍රයේ අනෙක් ශීර්ෂ තුනෙන් නිරූපණය කෙරෙන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න. (1979)

(6) මූල ලක්ෂ්‍යය O ලෙස ඇති ආගන්ඩ් සටහනේ P ලක්ෂ්‍යයෙන් Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කෙරේ. එකම ආගන්ඩ් සටහනක,

i) $Z' = 2z$ (කොස් $\pi/3$ + i සයින් $\pi/3$) සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරන P' ලක්ෂ්‍යයත්

ii) $Z' - z$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරන P'' ලක්ෂ්‍යයත් ලබා ගැනීමට සාධන ද සමඟ නිර්මාණ ඉදිරිපත් කරන්න.

අ) O, P, P', P'' යනු සෘජුකෝණාස්‍රයක පිළිවෙලින් වාමාවර්ත අතට ගත් ශීර්ෂ බවත්

ආ) $Z' - Z = \sqrt{3}$ iz බවත්, ආගන්ඩ් සටහනක අපෝහනය කරන්න. ඔබගේ අපෝහනය සඳහා හේතු පැහැදිලි ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න. (1980)

(7) ආගන්ඩ් සටහනේ P, P' ලක්ෂ්‍යය මගින් පිළිවෙලින් Z, Z' සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කෙරෙයි.

අ) $\frac{1}{2}(Z+Z')$ ආ) $Z-Z'$ ඇ) $i(Z-Z')$

නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය ලබා ගැනීමට ජ්‍යාමිතික නිර්මාණ ඉදිරිපත් කරන්න. ආගන් සටහනේ P_1, P_2, P_3 ලක්ෂ්‍ය මගින් පිළිවෙලින් Z_1, Z_2, Z_3 සංකීරණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කෙරෙයි. $i(Z_2 - Z_3) = \frac{1}{2}\ \{(Z_1 - Z_2) + (Z_1 - Z_3)\}$ නම්, P_1, P_2, P_3 ත්‍රිකෝණය සමද්විපාද බවත් එහි වර්ගඵලය $\frac{1}{2}|Z_2 - Z_3|^2$ බවත් සාධනය කරන්න.

(1981)

(8) $\omega =$ කොස් $\frac{2\pi}{3}$ + i සයින් $\frac{2\pi}{3}$ විට $x^3 - 1 = 0$ සමීකරණයේ මූල

i) $1, \omega, \omega^2$ මගින් දැක්වෙන බවද

ii) $1 + \omega + \omega^2 = 0$ සමීකරණය සපුරාලන බව ද සත්‍යාපනය කරන්න. Z_1, Z_2, Z_3 යනු ඕනෑම සංකීර්ණ සංඛ්‍යා තුනක් නම්, $(Z_1 + Z_2\omega + Z_3\omega^2)(Z_1 + Z_2\omega^2 + Z_3\omega) = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - Z_2 Z_3 - Z_3 Z_1 - Z_1 Z_2$ බව පෙන්වන්න. Z_1, Z_2, Z_3 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා පිළිවෙලින් ආගන් සටහනෙහි $A_1 A_2 A_3$ ලක්ෂ්‍යය නිරූපණය කරයි. $Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - Z_2 Z_3 - Z_3 Z_1 - Z_1 Z_2 = 0$ නම් $A_1 A_2 A_3$ ත්‍රිකෝණය සමපාද බව අපෝහනය කරන්න. (1982)

(9) $z + x + iy$ සංකීරණ සංඛ්‍යාවක ප්‍රතිබද්ධය, $\bar{z}, \bar{z} = x - iy$ මගින් දෙනු ලැබේ. α, β යනු සංකීර්ණ සංඛ්‍යා හා n යනු ධන නිඛිලයක් වන විට පහත දැක්වෙන ප්‍රතිඵල සාධනය කරන්න.

i) $\overline{(\alpha + \beta)} = \bar{\alpha} +$

ii) $\overline{(\alpha - \beta)} = \bar{\alpha} - \bar{\beta}$

iii) $\overline{(\alpha\beta)} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$

iv) $\overline{\alpha^{-1}} = (\bar{\alpha})^{-1}$

v) $\overline{\alpha^n} = (\bar{\alpha})^n$ තාත්ත්වික සංගුණකය සහිත $\alpha_0 z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots\dots\dots + \alpha_{n-1} z + \beta_n$ බහුපදය $z = z_0$ දී අරුදහන් වේ නම් $z = \bar{z}_0$ හිදී ද එය අතුරුදහන් වන බව පෙන්වන්න. (1983)

(10) Z_1, Z_2 හා Z_3 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන්ඩ් සටහනේ පිළිවෙලින් A_1, A_2 හා A_3 ඒක රේඛීය නොවන ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය වේ. A_1, A_2 A_3 ත්‍රිකෝණයේ කේන්ද්‍රකය මගින් $\left(\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right)$ නිරූපණය කරන බව පෙන්වන්න. $(Z_1 + Z_2 + Z_3)(Z_1 + Z_2\omega + Z_3\omega^2)(Z_1 + Z_2\omega^2 + Z_3\omega) = Z_1^3 + Z_2^3 + Z_3^3 - 3Z_1 Z_2 Z_3$ බව ද පෙන්වන්න. මෙහි $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ වේ. $Z_1^3 + Z_2^3 + Z_3^3 - 3Z_1 Z_2 Z_3 = 0$ නම් පහත සඳහන් අවස්ථා සිදුවිය හැකි බව අපෝහනය කරන්න.

i) A_1, A_2, A_3 ත්‍රිකෝණය සමපාද වේ. එහෙත් එහි කේන්ද්‍රකය මූලෙහි නොපිහිටයි.

ii) A_1, A_2, A_3 ත්‍රිකෝණය සමපාද නොවේ. එහෙත් එහි කේන්ද්‍රකය මූලෙහි පිහිටයි.

iii) A_1, A_2, A_3 ත්‍රිකෝණය සමපාද හා එහි කේන්ද්‍රකය මූලෙහි පිහිටයි. (ත්‍රිකෝණයක කේන්ද්‍රකය යනු මධ්‍යස්ථ තුන ඡේදනය වන පොදු ලක්ෂ්‍යය වේ.) (1983)

(11) Z හා W යනු සංකීර්ණ සංඛ්‍යා වන අතර $\bar{Z}$ හා $\bar{W}$ පිළිවෙලින් ඒවායේ සංකීර්ණ ප්‍රතිබද්ධ දක්වයි.

i) $z\bar{w} + \bar{z}w = 2\,\text{Re.}(z\bar{w})$

ii) $(z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{w} + 2\,\text{Re.}(z\bar{w})$

iii) $2|\text{Re. } z||\text{Im. } z| < |z|^2$

iv) $|z| < |\text{Re.} z| + |\text{Im. } z| < \sqrt{2}|z|$

v) $|z + w| < |z| + |w$

බව සාධනය කරන්න. මෙහි Re. z සහ Im. z පිළිවෙලින් z හි තාත්වික සංඛ්‍යා හා අතාත්වික කොටස් දක්වයි. (ජ්‍යාමිතික සාධන පිළිගනු නොලැබේ.) (1984)

(12) Z_1, Z_2, Z_3 සහ Z_4 යන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන්ඩ් සටහනේ පිළිවෙලින් A_1, A_2, A_3 හා A_4 ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍යය නිරූපණය කරයි. $\frac{(z_1-z_2)}{(z_3-z_4)}$ යන්න හුදෙක් අතාත්ත්වික වීම සඳහා ජ්‍යාමිතික අවශ්‍යතාවයක් සොයන්න. $Re.(Z_1-Z_2)\,Re.(Z_3-Z_4)+Im.(Z_1-Z_2)\,Im.(Z_3-Z_4)=0$ නම් එවිට A_1A_2 යන්න A_3A_4 ට ලම්බ බව සාධනය කරන්න. මෙහි Re. (ω) සහ Im. (ω) මගින් ω හි තාත්ත්වික සහ අතාත්වික කොටස් දක්වනු ලැබේ. ලම්බ කේන්ද්‍රයේ පැවැත්ම පිළිබඳ කවර ප්‍රතිඵලයක් උපකල්පනය කර නොගනිමින් $A_1 A_2 A_3$ ත්‍රිකෝණයේ ශීර්ෂවල සිට සම්මුඛ පාද වලට අඳින ලද ලම්බ, $Re.\frac{(z-z_1)}{(z_2-z_3)} = Re.\frac{(z-z_2)}{(z_3-z_1)} = Re.\frac{(z-z_3)}{(z_1-z_2)} = 0$ සපුරාලනු ලබන z මගින් නිරූපණය කරන ලද ලක්ෂ්‍යයේදී හමුවන බව පෙන්වන්න. (1985)

(13) Z_1, Z_2, Z_3 සහ Z_4 යන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන්ඩ් සටහනේ පිළිවෙලින් A_1, A_2, A_3 හා A_4 ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍යය නිරූපණය කරයි. Z_1 සහ Z_2, $aZ^2 + 2bz + C = 0$ සමීකරණයෙහි මූල වන අතර Z_3 සහ Z_4, $a'Z^2 + 2b'Z + c' = 0$ සමීකරණයෙහි මූල වේ. $ac' + a'c - 2bb' = 0$ නම් එවිට $(Z_1+Z_2)\quad(Z_3+Z_4) = 2(Z_1Z_2 + Z_3Z_4)$ (*) බව පෙන්වන්න. (*) $\{Z_1 - \frac{1}{2}(Z_3+Z_4)\}\{Z_2 - \frac{1}{2}(Z_3+Z_4)\} = \{\frac{1}{2}(Z_3-Z_4)\}^2$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කිරීමෙන් E යනු $A_3 A_4$ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය නම්, එවිට EA_1 සහ EA_2, $A_3 A_4$ ට සමාන ලෙස ආනත බව අපෝහනය කරන්න. (1986)

(14) z හා z' සංකීරණ සංඛ්‍යා ආගන්ඩ් සටහනේ P සහ P' ලක්ෂ්‍යය මගින් නිරූපණය කරනු ලැබේ. z − z' සහ zz' සංකීරණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය ලබා ගැනීම සඳහා අවශ්‍ය ජ්‍යාමිතික නිර්මාණ දෙන්න. P_1, P_2, P_3 ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් z_1, z_2, z_3 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන අතර Q_1, Q_2, Q_3 ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් zz_1, zz_2, zz_3 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි. මෙහි z යනු ඕනෑම ශුන්‍ය නොවූ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවකි. $P_1P_2P_3$ සහ $Q_1Q_2Q_3$ ත්‍රිකෝණ සමරූපී බව පෙන්වන්න. (1987)

(15) Z_1, Z_2 සහ Z_3 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන්ඩ් සටහනේ පිළිවෙලින් P_1, P_2 සහ P_3 ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලැබේ. $(Z_3 - Z_1) = \omega(Z_2 - Z_3)$ නම් එවිට P_1, P_2, P_3 යනු සමපාද ත්‍රිකෝණයක් බව සාධනය කරන්න. මෙහි ω යනු එකෙහි අතතාවික සත මූලයක් වේ. Q_1, Q_2, Q_3 ත්‍රිකෝණයක පාද මත එයට පිටතින් සමපාද ත්‍රිකෝණ ඇඳ ඇත. විස්තර කරන ලද එක එකක් සමපාද ත්‍රිකෝණවල කේන්ද්‍රිකයන්ට අනුරූප සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න. මුල් කොටස උපයෝගී කර ගනිමින් කේන්ද්‍රික සමපාද ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂ සාදනු ලබන බව පෙන්වන්න. (1988)

(16) P_0, P_1 සහ P_2 ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් z_0, z_1 සහ z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරනු ලැබේ. $\frac{P_0P_2}{P_0P_1} = \lambda > 0$ නම් හා $< P_1P_0P_2 = \theta$ නම්, $(z_2 - z_0)$ සහ $(z_1 - z_0)$ $(\cos\theta + i\sin\theta)$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරනු ලබන ලක්ෂ්‍යය ලබා ගැනීම සඳහා ජ්‍යාමිතික නිරූපණ ඉදිරිපත් කර $z_2 = z_0 + \lambda(z_1 - z_0)(\cos\theta + i\sin\theta)$ බව අපෝහනය කරන්න. මෙහි වාමාවර්ත අතට මැන ඇත. A, B, C, D, E, F ශීර්ෂ වාමාවර්ත අතට ගන්නා ලද ABCDEF සවිධි ෂඩස්‍රයක A සහ B ශීර්ෂ පිළිවෙලින් 2 + 2i සහ 3 + 3i සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරනු ලැබේ. ඉහත ප්‍රතිඵලය උපයෝගී කර ගනිමින් E සහ F ශීර්ෂ මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න. (1989)

(17) Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක " මාපාංකය "$|z|$ සහ " විස්තාරය " Arg.(z) අර්ථ දක්වන්න. Arg. $\bar{z}$ = – Arg. z සහ $z\bar{z} = |z|^2$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $\bar{z}$ යනු z හි සංකීර්ණ ප්‍රතිබද්ධය වේ.

$z = x + iy$ සහ $Z_0 = x_0 + iy_0$ ලෙස ලිවීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, $|z - z_0| = R$, අරය සහ කේන්ද්‍රය Z_0 ලක්ෂ්‍යයෙහි වූ වෘත්තයක ආගන්ඩ් සටහනේ නිරූපණය කරන බව පෙන්වන්න. A,B,C,D,E,F (වාමාවර්ත අතට ගන්නා ලද) සවිධි ෂඩස්‍රයක කේන්ද්‍රය O මූල ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටා ඇති අතර z = 3 හි A ශීර්ෂය පිහිටා ඇත.

i) B සහ C ශීර්ෂයන්ට අනුරූප සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

ii) B,O,C ලක්ෂ්‍ය හරහා යන වෘත්තයේ සමීකරණය $|z - z_0| = R$ ආකාරයෙන් සොයන්න.

iii) ෂඩස්‍රය O වටා 45^0 කෝණයකින් දක්ෂිණාවර්තව භ්‍රමණය කරනු ලැබේ නම් B සහ C හි නව පිහිටීම් වලට අනුරූප සංකීර්ණ සංඛ්‍යා $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් සොයන්න. (1990)

(18) z_1, z_2, z_3 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන්ඩ් සටහනේ පිළිවෙලින් P_1, P_2 සහ P_3 ලක්ෂ්‍ය වලින් නිරූපණය වේ. $\frac{(z_3 - z_1)}{(z_2 - z_1)}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවෙහි මාපාංකය සහ විස්තාරය ජ්‍යාමිතිකව විවරණය කරන්න. තව ද, z_1', z_2', z_3' සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන්ඩ් සටහනේ පිළිවෙලින් P_1', P_2' සහ P_3' ලක්ෂ්‍ය වලින් නිරූපණය වේ. $\frac{(z_1' - z_3)}{(z_2 - z_3)} = \frac{(z_2' - z_1)}{(z_3 - z_1)} = \frac{(z_3' - z_2)}{(z_1 - z_2)}$ නම් එවිට $P_2P_3P_1'$, $P_3P_1P_2'$, $P_1P_2P_3'$ ත්‍රිකෝණ සමරූපී බව සාධනය කරන්න. තව ද $P_1P_2P_3$ සහ $P_1' P_2' P_3'$ ත්‍රිකෝණයන්ට එකම කේන්ද්‍රකයක් ඇති බව ද සාධනය කරන්න. (1991)

(19) ආගන්ඩ් රූ සටහනෙහි Z හා Z' සංඛ්‍යා පිළිවෙලින් P හා P' මඟින්ද Z – Z' සංඛ්‍යාව Q මඟින්ද නිරූපණය වන්නේ නම්, OQ යන්න P'P ට සමාන හා සමාන්තර බව පෙන්වන්න. B හා C කෝණ එක එකක් $\frac{(\pi - a)}{2}$ වන සේ වූ ABC සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක A,B,C ශීර්ෂ මඟින් පිළිවෙලින් Z_1, Z_2, Z_3 සංඛ්‍යා නිරූපණය කරනු ලැබේ. $(Z_3 - Z_2)^2 = 4(Z_3 - Z_1)\ (Z_1 - Z_2) \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ බව සාධනය කරන්න. (1992)

(20) $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = 1$ සමීකරණය සපුරාලන $-\pi < \theta < \pi$ ප්‍රාන්තරයෙහි පිහිටියා වූ θ හි ප්‍රභින්න අගයන් තුන නිර්ණය කරන්න. එනයින් $\omega^3 = 1$ සමීකරණය සපුරාලන එකිනෙකට වෙනස් ω සංඛ්‍යා a + ib ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි a සහ b තාත්ත්වික වේ. $\omega \neq 1$ නම්, $1 + \omega + \omega^2 = 0$ බව අපෝහනය කරන්න. p සහ q තාත්වික විට, $x^3 - 3pqx - p^3 - q^3$ ප්‍රකාශනය $(x - p - q)\ (x - p\omega - q\omega^2)\ (x - p\omega^2 - q\omega)$ ආකාරයෙන් සාධක වලට බිඳිය හැකි බව පෙන්වන්න. එනයින් $Z^3 - 18z - 35 = 0$ සපුරාලන Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවල අගයන් සොයන්න. (1993)

(21) ආගන්ඩ් සටහනෙහි Z_1 සහ Z_1 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා පිළිවෙලින් P_1 සහ P_2 ලක්ෂ්‍යය වලින් නිරූපණය කෙරේ. λ යනු තාත්ත්වික පරාමිතයක් විට $Z_1 + \lambda (Z_2 - Z_1)$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ආගන් සටහනෙහි නිරූපණය කෙරෙන P ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටීම සොයන්න. $Z_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$ සහ $Z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ යැයි ගනිමු. $\frac{P_1P^{/}}{P_1P_2}$ සහ $\frac{P_1P^{//}}{P_1P_2} = -1$ වන පරිදි සහ P_1P_2 මත ලක්ෂ්‍යය දෙකම පවතින සේ පිහිටියා වූ $P^{/}$ හා $P^{//}$ ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් නිරූපණය කෙරෙන $Z^{'}$ සහ Z'' සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න. තව ද $Arg.(z^{/})$ සහ $Arg.(z^{//})$ ලබාගන්න. $(-\pi < Arg.\ z \leq \pi)$ එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ P'හා P'' ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් P_1OP_2 කෝණයේ අභ්‍යන්තර සහ බාහිර සමච්ඡේදක මත පිහිටන බව පෙන්වන්න. මෙහි O මූලය වේ. (1993)

(22) සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක මාපාංකය සහ විස්තාරය අර්ථ දක්වන්න. ආගන්ඩ් රූ සටහනෙහි P ලක්ෂ්‍යය Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරයි. Z^2 නිරූපණය කෙරෙන Q ලක්ෂ්‍යය ජ්‍යාමිතික ලෙස නිර්මාණය කරන්නේ කෙසේදැයි පෙන්වන්න. කේන්ද්‍රය (1, 0) සහ ඒකක අරයෙන් යුත් වෘත්තය මත P පිහිටයි නම්,

i) $|Z^2 - Z| = |Z|$

ii) $amp\,(Z-1)\ amp = Z^2 = \frac{2}{3} amp\ (Z^2 - Z)$ බව ජ්‍යාමිතික පෙන්වන්න. (1994)

(23) $Z = x + iy$, $x > 0$, $y > 0$ යන්නෙන් දෙනු ලබන Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ආගන්ඩ් සටහනක P ලක්ෂ්‍යයෙන් නිරූපණය වේ. එම රූප සටහනෙහිම Q ලක්ෂ්‍යයෙන් $i\sqrt{3}z$ සංඛ්‍යාව නිරූපණය වේ නම් Q නිර්ණය කළ හැක්කේ කෙසේදැයි පෙන්වන්න. තව ද පිළිවෙලින් $Z + i\sqrt{3}z$ සහ $Z - i\sqrt{3}z$ නිරූපණය කරන R සහ R' ලක්ෂ්‍යයන් ද සටහන් කරන්න. Z හි විස්තාරය θ වේ.

i) R අතාත්වික අක්ෂය මත පිහිටයි නම් θ සොයන්න.

ii) Z^2 නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය මූල ලක්ෂ්‍යය සහ R ඒක රේඛීය නම්, $\theta = \frac{\pi}{3}$ බව පෙන්වන්න.

iii) ආගන්ඩ් සටහන භාවිතයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $|z + i\sqrt{3}z|^2 + |z - i\sqrt{3}z|^2 = 8|z|^2$ බව පෙන්වන්න. (1996)

(24) අ) Z_1 සහ Z_2 යනු $Z_1 + Z_2$ සහ $Z_1 Z_2$ එක එකක් සෘණ තාත්වික සංඛ්‍යා වන පරිදි වූ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකකි. Z_1 සහ Z_2 තාත්වික සංඛ්‍යා බව පෙන්වන්න.

ආ) Z_1, Z_2 සහ Z_3 යනු $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ සහ $Z_1 + Z_2 + Z_3 = 0$ වන පරිදි වූ නිශ්ශූන්‍ය සංකීර්ණ සංඛ්‍යා වේ. මෙම සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන් සටහනක සමපාද ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂ නිරූපණය කරන බව පෙන්වන්න. (1997)

(25) ආගන්ඩ් සටහනෙහි A,B සහ C ලක්ෂ්‍යය පිළිවෙලින් Z_1, Z_2 සහ Z_3 සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවලට අනුරූප වේ. AB සිට වාමාවර්ත අතට මිනුවිට AC හි ආනත කෝණය θ නම්ද AB = AC නම් ද $Z_3 - Z_1 = (Z_2 - Z_1)$ බව පෙන්වන්න. P, Q, R, S යනු ආගන් සටහනේ සමචතුරස්‍රයකි.

i) P සහ Q පිළිවෙලින් Z_1 සහ Z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවලට අනුරූප වේ නම් R සහ S ට අනුරූප වන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා Z_1 ,Z_2 ඇසුරෙන් සොයන්න.

ii) Q සහ S පිළිවෙලින් Z_1 සහ Z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවලට අනුරූප වේ නම් P සහ R ට අනුරූප වන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා Z_1 , Z_2 ඇසුරෙන් සොයන්න.

iii) P යනු $1-i$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යය ද $PR=2\sqrt{2}$ වන පරිදි R විචල්‍ය වේද Q යනු Z අනුරූප ලක්ෂ්‍යය ද නම් Z සඳහා සම්බන්ධතාවයක් ලබා ගන්න. එනයින් Q හි පථය නිර්ණය කරන්න. (1997)

(26) Z_1 සහ Z_2 යනුවෙන් සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ගනිමු.

i) $\text{Re}(Z_1\overline{Z_2}) = \text{Re}(\overline{Z_1}Z_2)$

ii) $|Z_1 - Z_2|^2 = |Z_1|^2 - 2\,\text{Re}(Z_1\overline{Z_2}) + |Z_2|^2$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින් $|1 - Z_1\overline{Z_2}|^2 - |Z_1 - Z_2|^2 = (1 - |Z_1|^2)(1 - |Z_2|^2)$ බව පෙන්වන්න.

$|Z_2| < 1$ සහ $Z_1\overline{Z_2} \neq 1$ ලෙස ගනිමු. 1 ට වඩා $|Z_1|$ අඩුවීම හෝ වැඩිවීම හෝ අනුව 1 ට වඩා $\left|\frac{Z_1-Z_2}{1-Z_1Z_2}\right|$ අඩු හෝ වැඩි හෝ වන බව පෙන්වන්න. α යනු $2Z^5 - iZ^4 - iZ - 2 = 0$ සමීකරණයේ මූලයක් නම් $|\alpha| = 1$ බව අපෝහනය කරන්න.

[ඉඟිය : දී තිබෙන සමීකරණය $\frac{1}{Z^4} = \frac{Z-\frac{i}{2}}{1+\frac{iZ}{2}}$ ලෙස ලියන්න.] (1998)

(27) අ) ආගන්ඩ් සටහනේ P_1, P_2 ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් Z_1, Z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි. ආගන්ඩ් සටහනෙහි $Z_1 + Z_2$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය ලබාගැනීම සඳහා ජ්‍යාමිතික නිර්මාණයක් දෙන්න.

i) $|Z_1 - Z_2| = P_1P_2$

ii) $|Z_1 + Z_2| = |Z_1 - Z_2|$ ද Z_1 සහ Z_2 නිශ්ශුන්‍ය ද නම් $\left|\text{Arg}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)\right| = \frac{\pi}{2}$

iii) $\left|\text{Arg}\left(\frac{Z_1+Z_2}{Z_1-Z_2}\right)\right| = \frac{\pi}{2}$ නම් $|Z_1| = |Z_2|$ බව පෙන්වන්න.

ආ) ආගන් සටහනේ A, B, P ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් a, b, z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි. A සහ B යනු අචල ලක්ෂ්‍යයන් ද P යනු $\left|\frac{Z-a}{Z-b}\right| = k$ (නිශ්ශුන්‍ය නියතයක්) වන පරිදි වූ විචල්‍ය ලක්ෂ්‍යයක් ද නම් $k = 1$ සහ $k \neq 1$ අවස්ථා දෙක වෙන වෙනම සලකමින් P හි පථය සොයන්න. (1998)

(28) Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව, ආගන්ඩ් රූ සටහනේ P ලක්ෂ්‍යයෙන් නිරූපණය වේ. O යනු මූල ලක්ෂ්‍යය ද, w යනු දී ඇති සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් ද යැයි ගනිමු. O වටා ϕ කෝණයකින් වාමාවර්ත අතට OP භ්‍රමණය කළ විට P හි නව පිහිටීම P' යැයි ගනිමු. මෙහි $\phi = \text{Arg}\,w$ වේ. Q යනු $OQ = |w|OP'$ වන පරිදි OP' මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යය නම් Q මඟින් zw සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරපණය කෙරෙන බව පෙන්වන්න.

$|Z - a| = a$ වෘත්තය මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා යන බව ද එහි කේන්ද්‍රය x අක්ෂය මත පිහිටන බව ද සත්‍යාපනය කරන්න. මෙහි a යනු ධන නියතයකි.

$|Z - a| = a$ විට

i) $z \neq 0$ සඳහා, $z - 2a = i\,z\tan\theta$ බව ද,

ii) $\text{Re}\left(\frac{1}{z-2a}\right)$, z හි අගය මත රඳා නොපවතින බව ද පෙන්වන්න. මෙහි $\theta = \text{Arg}\,z$ වේ. (1999)

(29) අ) $\frac{(-1+i)^5}{(1+i)^4}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ මාපාංකය සහ විස්තාරය වීජීය ලෙස සොයන්න.

ආ) P_1 හා P_2 ලක්ෂ්‍යයන් ආගන් සටහනේ පිළිවෙලින් Z_1 හා Z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරයි. ආගන්ඩ් සටහනේ $Z_1 + Z_2$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටීම ලබාගැනීමට ජ්‍යාමිතික නිර්මාණයක් සපයන්න.

$Z_1 = \frac{1+i}{1-i}$ හා $Z_2 = \frac{\sqrt{2}}{1-i}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන්ඩ් සටහනේ ලකුණු කරන්න.

ඉහත ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් $Z_1 + Z_2$ හි පිහිටීම සොයන්න.

$\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ බව අපෝහනය කරන්න. (2000)

(30) අ) Arg (z- a) = α නම්, Z හි පථය විස්තර කරන්න. මෙහි $a \in \mathbb{R}$ සහ $0 < \alpha < \pi$ වේ.

Arg (z + 1) = $\frac{\pi}{6}$ සහ Arg (z - 1) = $\frac{2\pi}{3}$ බව දී ඇත. මුල් කොටස උපයෝගී කරගනිමින් Z සොයන්න.

ආ) $\frac{5-i}{2-3i}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව λ (1+ i) ආකාරයට ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න.

මෙහි a තාත්ත්වික වේ. λ හි අගය ප්‍රකාශ කරන්න.

ඒ නයින්, $\left[\frac{5-i}{2-3i}\right]^6$ අතාත්වික බව පෙන්වා එහි අගය නිර්ණය කරන්න. (2001)

(31) Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව, z = x + iy, x > 0, y > 0 මගින් දෙනු ලැබේ. ආගන් සටහනේ z, 2iz, z+2iz ට අනුරූප ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් A,B,C වේ. A,B,C ලක්ෂ්‍ය සළකුණු කර $A\hat{O}B$ සහ tan $A\hat{O}C$ නිර්ණය කරන්න.

i) C අතාත්වික අක්ෂයේ පිහිටයි නම් x සහ y අතර සම්බන්ධතාවක් ලබාගන්න.

ii) y = 2x නම්, z^2 , සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය OC රේඛාව මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

iii) $|z| \leq 4$ සහ $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \leq \text{Arg } z \leq \tan^{-1}(2)$ වන පරිදි වූ Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යයන්ගෙන් සමන්විත පෙදෙස වෙනත් රූප සටහනක අඳුරු කරන්න.

අඳුරු කළ කොටසේ වර්ගඵලය සොයන්න. (2002)

(32) $\omega = \sqrt{3} + i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $r(\cos\theta - i\sin\theta)$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි $r > 0$ වන අතර $0 \leq \theta < 2\pi$ පරිදි වූ θ, රේඩියන වලින් ඇත.

ඉහත ස්වරූපයෙන් $\omega^2, \omega^3, \omega^4$ සහ ω^5 ලබාගන්න.

$6 < |z| < 30$ සහ $\frac{\pi}{6} < \text{Arg } z < \frac{5\pi}{6}$ වන සේවූ Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන්ඩ් සටහනේ නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය වලින් සමන්විත R පෙදෙස අඳුරු කරන්න.

ω^n (n = 1,2,….,5) සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය අතරින් කුමන ලක්ෂ්‍ය R පෙදෙසේ පිහිටන්නේ දැයි නිර්ණය කරන්න. (2003)

(33) Z යනු $\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව යැයි ගනිමු. $2Z^2$ හා $\frac{3}{z^2}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා එක එකක මාපාංකය හා විස්තාරය සොයන්න.

ආගන්ඩ් සටහනක O මූල ලක්ෂ්‍යය ද A යන්න $2z^2$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ද B යන්න $\frac{3}{z^2}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ද නිරූපණය කරයි.

O හා B හරහා යන රේඛාව මත Z නිරූපණය කරනු ලබන ලක්ෂ්‍යය පිහිටන්නේ ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.
OACB සමාන්තරාස්‍රයක් වන සේ C ලක්ෂ්‍ය තෝරාගෙන ඇත. C මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව p + iq කාටීසීය ආකාරයෙන් නිර්ණය කරන්න.
OACB හි විකර්ණවල දිග සොයන්න. (2004)

(34) a) Z_1සහ Z_2 යනු ඕනෑම සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකක් යැයි ගනිමු. ආගන්ඩ් සටහනෙහි $Z_1 + Z_2$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කෙරෙන ලක්ෂ්‍ය නිර්මාණය කරන්න.
$|Z_1 + Z_2| = |Z_1| + |Z_2|$ වන අවස්ථාව විදහා දක්වෙන රූප සටහනක් අඳින්න.
සාධාරණ වශයෙන් $|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$ වන්නේ ඇයිදැයි ජ්‍යාමිතිකව පැහැදිලි කරන්න.
$Z_1 = -12+5i$ හා $|Z_2| = 5$ නම්, $|Z_1 + Z_2|$ හි වැඩිතම අගය සොයන්න.
$|Z_1 + Z_2|$ට ස්වකීය වැඩිතම අගය ඇත්නම් හා $\frac{\pi}{2} < \text{Arg } z_2 < \pi$ නම්, p +iq ආකාරයෙන් Z_2 ප්‍රකාශ කරන්න.

b) ආගන්ඩ් සටහනේ A,B,C,D ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් Z_1, Z_2,Z_3 හා Z_4 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි. AB හා CD ලම්බව ඡේදනය වේ නම්, එවිට $\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}\right)$ හුදෙක් අතාත්වික බව පෙන්වන්න. (2005)

(35) a) $\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta + i\sin\beta} = \cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta)$ බව පෙන්වන්න.
$Z_1 = -1 + i$ සහ $Z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ යැයි ගනිමු. $\frac{z_1}{z_2}$ හි තාත්ත්වික කොටස සහ අතාත්වික කොටස සොයන්න.
Z_1සහ Z_2 එක එකක් $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි $r > 0$ සහ $0 < \theta < \pi$ වේ.
$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ බව අපෝහනය කරන්න.

b) R යනු, ආගන්ඩ් සටහනෙහි $0 \leq \text{Im } z \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ සහ $|Z - 2| \leq 1$ අවශ්‍යතා සපුරාලන Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවලින් සමන්විත පෙදෙස ලෙස ගනිමු. R පෙදෙස අඳුරු කර, Z නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය R පෙදෙස පුරා විචලනය වන විට Z හි ප්‍රධාන විස්තාරය 'Arg z' විශාලතම වන පරිදි Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න. (2006)

(36) a) $Z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ හා $Z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන් සටහනක පිළිවෙලින් A හා B ලක්ෂ්‍යය මගින් නිරූපණය කෙරෙයි. Arg z_1 හා Arg z_2 සොයන්න.
OACB යනු ආගන් සටහනේ සමචතුරස්‍රයක් යැයි දී ඇත්නම් C මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ මාපාංකය හා විස්තාරය සොයන්න. මෙහි O යනු මූල ලක්ෂ්‍යය වේ.

b) i) $\left|Z - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| \leq 2$ අවශ්‍යතාව යටතේ$|Z - 3|$හි අඩුතම හා වැඩිතම අගයන් සොයන්න.
ii) Arg (z-1) $= \frac{\pi}{6}$ අවශ්‍යතාව යටතේ$|Z|$ හි අඩුතම අගය සොයන්න. (2007)

(37) $Z^3 - 1$ සාධකවලට බිඳීමෙන් $Z^3 - 1 = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.
ඉහත සමීකරණයෙහි එක් සංකීර්ණ මූලයක් ω නම්, අනෙක ω^2 බව පෙන්වන්න.
$r = 1,2,3$ සඳහා $Re\left(\frac{1}{1+\omega^r}\right) = \frac{1}{2}$ බව පෙන්වා ප්‍රතිඵලය ජ්‍යාමිතිකව විවරණය කරන්න.
Z_1 , Z_2 සහ Z_3 යනු $Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - Z_1Z_2 - Z_2Z_3 - Z_3Z_1 = 0$ සම්බන්ධය තෘප්ත කරන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා තුනකි. Z_1 යන්න $Z_1 = -\omega Z_2 - \omega^2 Z_3$ හෝ $Z_1 = -\omega^2 Z_2 - \omega Z_3$ ලෙස ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න.
Z_1, Z_2 හා Z_3 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා තුන සමපාද ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂ නිරූපණය කරන බව අපෝහනය කරන්න. (2008)

(38) a) $-80 - 18i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවෙහි වර්ගමූලය සොයා, $4z^2 + (16i - 4)z + (65 + 10i) = 0$ වර්ගජ සමීකරණය විසඳන්න.
b) ආගන්ඩ් සටහනක $Arg(z + 1) = \frac{\pi}{3}$ සමීකරණය විවරණය කර $|Z|$ හි අවම අගය සොයන්න.
c) ω යනු $z^3 - 1 = 0$ සමීකරණයෙහි සංකීර්ණ මූලයක් නම්, එවිට ω^2 අනෙක් සංකීර්ණ මූලය බව පෙන්වන්න.
$\omega^{2k} + (1 + \omega)^k = 0$ බව ද පෙන්වන්න. මෙහි k ඔත්තේ ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි.
ඔත්තේ ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාමය k සඳහා $x^2 + x + 1$ යන්න $x^{2k} + (1 + x)^k$ හි සාධකයක් බව අපෝහනය කරන්න. (2009)

(39) a) $|Z - a| = |Z + a|$ සපුරාලනු ලබන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ පථය නිර්ණය කරන්න. මෙහි a යනු ශූන්‍ය නොවන තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවකි.
b) z_1 හා $z_2 (\neq 0)$ යනු $|Z_1 - 2Z_2| = |Z_1 + 2Z_2|$ වන ආකාරයේ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකක් යැයි ගනිමු.
a) කොටස උපයෝගී කරගනිමින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ , $\frac{iz_1}{z_2} = k$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි k තාත්ත්වික වේ.
i) $|Arg(z_1) - Arg(z_2)| = \frac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න.
ii) ආගන්ඩ් සටහනෙහි P_1 හා P_2 ලක්ෂ්‍යය දෙක පිළිවෙලින් $Z_1 + 2Z_2$ හා $Z_1 - 2Z_2$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි.
OP_1 රේඛාව OP_2 රේඛාවට ලම්බ නොවේ නම්, $P_1\hat{O}P_2 = \tan^{-1}\left[\frac{4|k|}{k^2-4}\right]$ බව පෙන්වන්න. මෙහි O යනු ආගන්ඩ් තලයේ මූල ලක්ෂ්‍යය වේ.
OP_1 රේඛාව OP_2 රේඛාවට ලම්බ නම්, k හි විය හැකි අගය දෙක නිර්ණය කරන්න. (2010)

(40) a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ හා $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $A(\lambda A + \mu I = I$ වන අයුරින් λ හා μ අගයන් සොයන්න. මෙහි I යනු 2 x 2 ඒකක න්‍යාස වේ.
ඒනයින්, A^{-1} සොයන්න.
b) P, Q හා R යනු ආගන් සටහනේ පිළිවෙලින් Z_0, Z_1 හා Z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය තුනක් යැයි ගනිමු.
PQ =PR ද, θ යනු PQ සිට PRට වාමාවර්ත ලෙස මනින ලද කෝණය ද නම්, $Z_2 - Z_0 = (Z_1 - Z_0)(\cos\theta + i\sin\theta)$ බව පෙන්වන්න.

වාමාවර්ත ලෙස ගන්නා ලද A,B,C හා D ලක්ෂ්‍ය ආගන්ඩ් සටහනෙහි සමචතුරස්‍රයක් සාදයි. A හා B ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා පිළිවෙලින් $1 - i$ හා z යැයි ගනිමු. C හා D ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා z ඇසුරෙන් සොයන්න.
$AC = 2$ වන අයුරින් C විචලනය වෙයි නම්, B හි පථය ආගන් සටහනෙහි සොයන්න.
(2011)

(41) Z යනු සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් යැයි ගනිමු.
$|Z|^2 = Z\overline{Z}$ හා $|Z| \geq \text{Re } z$ බව සාධනය කරන්න.
ඒනයින් ඕනෑම Z_1 හා Z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකක් සඳහා $|Z_1| - |Z_2| \leq |Z_1 - Z_2|$ බව පෙන්වන්න.
$|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$ බව අපෝහනය කරන්න.
$|Z - i| < \frac{1}{2}$ නම්, $\frac{1}{2} < |Z| < \frac{3}{2}$ බව පෙන්වන්න.
$|Z - i| \leq \frac{1}{2}$ හා $\frac{\pi}{2} \leq \text{Arg } z \leq \frac{2\pi}{3}$ සඳහා z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ආගන්ඩ් සටහනෙහි නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය කුලකය අඩංගු R පෙදෙස අඳුරු කරන්න. (2012)

(42) a) $Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ යැයි ගනිමු.
$Q^T Q = \lambda I$ වන පරිදි වූ $\lambda \in \mathbb{R}$ හි අගය සොයන්න. මෙහි Q^T යනු Q න්‍යාසයෙහිම පෙරළුම වන අතර I යනු 2 x 2 ඒකක න්‍යාසය වේ.
ඒනයින්, $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ න්‍යාසයෙහි ප්‍රතිලෝමය සොයන්න.
$A = AP = PD$ වන පරිදි වූ 2 x 2 න්‍යාසයක් යැයි ගනිමු. මෙහි $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ වේ.
A සොයන්න.

b) $z = x + iy$ යනු සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් යැයි ගනිමු. මෙහි $x, y \in \mathbb{R}$ වේ. Z හි මාපාංකය $|Z|$ හා Z හි සංකීර්ණ ප්‍රතිබද්ධය $\overline{Z}$ අර්ථ දක්වන්න.
$|Z|^2 = Z\overline{Z}$ හා $Z - \overline{Z} = 2i \text{ Im } z$ බව පෙන්වන්න.
ඒ නයින්, $|Z - 3i|^2 = |Z|^2 - 6\text{Im } Z + 9$ හා $|1 + 3iZ|^2 = 9|Z|^2 - 6\text{Im } z + 1$ බව පෙන්වන්න.
$|Z - 3i| > |1 + 3i Z|$ වන්නේ $|Z| < 1$ නම් පමණක් අපෝහනය කරන්න.
$|Z - 3i| > |1 + 3iZ|$ හා $\text{Arg } z = \frac{\pi}{4}$ අවශ්‍යතා සපුරාලන පරිදි වූ Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය ආගන්ඩ් සටහනක අඳින්න. (2013)

(43) එකම ආගන්ඩ් සටහනක

i) $\text{Arg }(z + 1) = \frac{\pi}{3}$ ii) $\text{Arg }(z - 1) = \frac{3\pi}{6}$

සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා මගින් නිරූපණය කරනු ලබන ලක්ෂ්‍යයන්හි පථවල දළ සටහන් ඇඳ, ඒවායේ ඡේදන ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න. (2014)

(44) a) $a, b \in \mathbb{R}$ යැයි ද $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ හා $B = \begin{bmatrix} b & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ යැයි ද ගනිමු. $A^T A = B$ වන පරිදි a හා b හි අගයන් සොයන්න. මෙහි A^T මගින් A න්‍යාසයෙහි පෙරළුම දැක්වේ.

$C = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ හා $X = \begin{bmatrix} u \\ u+1 \end{bmatrix}$ යැයි ගනිමු. මෙහි $u \in \mathbb{R}$ වේ. $CX = \lambda BX$ යැයි ද ගනිමු. මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$ වේ. λ හි අගය හා u හි අගය සොයන්න.

λ හි මෙම අගය සඳහා $C - \lambda B$ න්‍යාසය සොයා, එහි ප්‍රතිලෝමය **නොපවතින** බව පෙන්වන්න.

b) $z \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු.

i) $|1-z|^2 = 1 - 2\,\text{Re}\,z + |z|^2$ බව හා

ii) $z \neq 1$ සඳහා $\text{Re}\left[\frac{1}{1-z}\right] = \frac{1-\text{Re}\,z}{|1-z|^2}$ බව පෙන්වන්න.

$\text{Re}\left[\frac{1}{1-z}\right] = \frac{1}{2}$ වන්නේ $|z| = 1$ හා $z \neq 1$ ම නම් පමණක් බව **අපෝහනය** කරන්න.

S යනු $\text{Re}\left[\frac{1}{1-z}\right] = \frac{1}{2}$ හා $-\frac{\pi}{3} < \text{Arg}\,z < \frac{\pi}{3}$ යන අවශ්‍යතා දෙකම සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවලින් සමන්විත කුලකය යැයි ගනිමු. S හි සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය ආගන්ඩ් සටහනක අඳින්න.

z යන්න S තුළ වේ නම් හා $\text{Re}\,z + \text{Im}\,z = = \frac{1}{\sqrt{2}}$ නම්, $z = \cos\left[\frac{\pi}{12}\right] - i\sin\left[\frac{\pi}{12}\right]$ බව පෙන්වන්න.

අලුත් නිර්දේශයට අනුව විස්. (ƶ) = Arg. (ƶ) ද, තා. කො ƶ = Rel.ƶ ද, අතා. කො (ƶ) = Im (ƶ) ද ලෙස භාවිත කරයි. (2014)

(45) ආගන්ඩ් සටහනක් මත $|z-3+4i| = 2$ සමීකරණය සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව මගින් නිරූපණය කරනු ලබන ලක්ෂ්‍යයේ පථය වන C හි දළ සටහනක් අඳින්න. **ඒනයින්**, C මත පිහිටි z සඳහා $|z+4i|$ හි වැඩිතම හා අඩුතම අගයන් සොයන්න. (2015)

(46) a) A, B හා C න්‍යාස තුනක්,

$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix}$ හා $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ මගින් දෙනු ලැබේ.

i) $\mathbf{AC} = \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ බව පෙන්වන්න. CA ගුණිතයක් සොයන්න.

ii) $\mathbf{BC} = \mathbf{I}_2$ වන පරිදි a, b, c හා d හි අගයන් සොයන්න.

iii) $(\lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{I}_2$ වෙයි නම්, λ හා μ සම්බන්ධ කෙරෙන සමීකරණයක් ලබා ගන්න.

$D = \begin{pmatrix} -3 & 8 & -6 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ න්‍යාසය, **A** හා **B** ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කර, ඒනයින් DC ගුණිතය සොයන්න.

b) z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් $z = \cos\theta + i\sin\theta$ ලෙස දෙනු ලැබේ ; මෙහි θ $(-\pi < \theta \leq \pi)$ තාත්වික පරාමිතියකි. ආගන්ඩ් සටහනක් මත z නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යයේ C පථය සොයන්න.

$\cos\theta$ හා $\sin\theta$ සඳහා ප්‍රකාශන z හා $\frac{1}{z}$ ඇසුරෙන් ලබා ගන්න.

$w = \frac{2z}{z^2+1}$ හා $t = \frac{z^2-1}{z^2+1}$ යැයි ගනිමු ; මෙහි z යන්න $z \neq \pm i$ වන පරිදි C මත පිහිටයි.

i) $\text{Im}(w) = 0$ හා $\text{Re}(t) = 0$ බව පෙන්වන්න. **ඒනයින්** හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $w^2 + t^2 = 1$ බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

ii) $w = 2$ සමීකරණය සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

iii) $t = i$ සමීකරණය සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න. (2015)